# ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Θεωρία (θεώρημα Fermat) σχολικό σελ. 260 - 261

**Α2.** Θεωρία (ορισμός) σχολικό σελ. 280

**Α3. α)** Σ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Σ

# ΘΕΜΑ Β

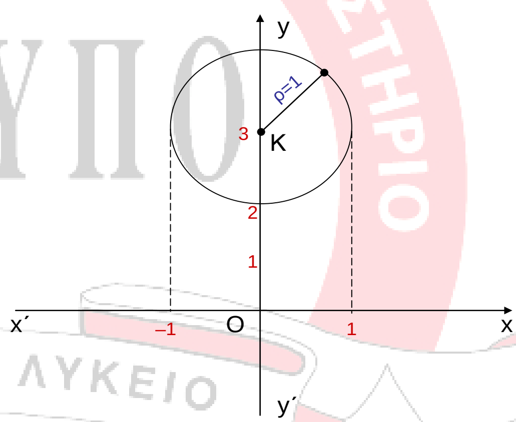
**Β1.** Ισχύει ότι:

$$|z-3i|+|\bar{z}+3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|+|\overline{z-3i}|=2 \Leftrightarrow |z-3i|+|z-3i|=2 \Leftrightarrow 2|z-3i|=2 \Leftrightarrow$$

$|z-3i|=1$ **(1),**

αφού από τη θεωρία έχουμε ότι: $|z|=|\bar{z}|$.

Συνεπώς από την (Ι) έχουμε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι ο κύκλος που έχει κέντρο Κ(0, 3) και ακτίνα ρ = 1.




**Β2.** Ισχύει ότι:

$$\textbf{(1)} \Leftrightarrow |z-3i|^2=1^2 \Leftrightarrow (z-3i)\left(\overline{z-3i}\right)=1 \Leftrightarrow (z-3i)\left(\bar{z}+3i\right)=1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \bar{z}+3i=\dfrac{1}{z-3i}$ **(2),** αφού από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $z \neq 3i$.

**Β3.** $w = z - 3i + \dfrac{1}{z-3i} \overset{(2)}{=} z - 3i + \bar{z} + 3i = z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$.

Αφού ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z = x + yi, όπου $x, y \in \mathbb{R}$ είναι ο κύκλος που έχει κέντρο Κ(0, 3) και ακτίνα ρ = 1, έχουμε ότι

$x\rho - x \le x \le \ \rho + \quad \Leftrightarrow 0 - 1 \le x \le 0 + 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$.Συνεπώς:

$-1 \le x \le 1 \Leftrightarrow -2 \le 2x \le 2 \Leftrightarrow -2 \le 2\operatorname{Re}(z) \le 2 \Leftrightarrow -2 \le w \le 2$.

**Β4.** Για z = x + yi, όπου $x, y \in \mathbb{R}$, έχουμε: $w = 2x$ και

$$|z - w| = |x + yi - 2x| = |-x + yi| = |-(x - yi)| = |x - yi| = |\bar{z}| = |z|.$$

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1 :** $\left(e^x f'(x) - e^x\right)' = \left(xf'(x)\right)', x \in \mathbb{R}$, $e^x f'(x) - e^x = xf'(x) + c, x \in \mathbb{R}$, για x=0 , c=1, άρα $e^x f'(x) - e^x = xf'(x) + 1, x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}, x \in \mathbb{R}$,

Έστω g(x) = $e^x$-x , x ∈R. Η g είναι παραγωγίσιμη στο R με g΄(x) = $e^x$ – 1

Η μονοτονία της g φαίνεται στον πίνακα

| x | -∞ 0 +∞ | |
|---|---|---|
| g΄(x) | - | + |
| g | ↘ | ↗ |

Και παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 το g(0) = 1, οπότε είναι $g(x) \geq 1$ , x $\in$R άρα $g(x) > 0$ , x $\in$R

$f'(x) = \dfrac{\left(e^x - x\right)'}{e^x - x}, x \in \mathbb{R}$ και τελικά $f(x)=\ln(e^x-x)+c_2$, για x=0, $c_2=0$

**Γ2:** Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με f΄(x) = $\frac{e^x - 1}{e^x - x}$, x $\in$R

Η μονοτονία της f φαίνεται στον πίνακα

| x | -∞ 0 +∞ | |
|---|---|---|
| f ΄(x) | - | + |
| f | ↘ | ↗ |

f γνησίως φθίνουσα στο (-∞, 0] και γνησίως αύξουσα στο [0, +∞) παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 το f(0)=0

**Γ3** : $f''(x) = ..... = \dfrac{(2-x)e^x - 1}{\left(e^x - x\right)^2}$

Έστω g(x)=$(2-x)e^x - 1$ . Η g είναι παραγωγίσιμη στο R με

g΄(x) = $e^x(1 – x)$ Η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνεται στον πίνακα

| x | -∞ 0 +∞ | |
|---|---|---|
| g΄(x) | + | - |
| g | ↗ | ↘ |

Άρα $g(x) \leq g(1) \Leftrightarrow g(x) \leq e – 1$

Η g έχει ολικό μέγιστο στο x = 1 το g(1) = e – 1 > 0

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(2-x-\frac{1}{e^x}\right)\right] = -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(e^x(2-x)\right)-1\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2-x}{e^{-x}}-1\right)$$

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του κανόνα De L' Hospital οπότε

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{-e^{-x}}-1\right) = -1$$

Οπότε για τη g(x) στο (-∞, 1] ισχύει $g\left((-\infty,1]\right)=\left(-1,e-1\right]$ διάστημα στο οποίο ανήκει το 0, οπότε υπάρχει $x_1 \in(-\infty, 1)$ τέτοιο ώστε $g(x_1) = 0$ και είναι μοναδικό λόγω της μονοτονίας της g

Ομοίως στο [1, +∞) είναι $g\left([1,+\infty)\right)=\left(-\infty,e-1\right]$ διάστημα στο οποίο ανήκει το 0, οπότε υπάρχει $x_2 \in(-\infty, 1)$ τέτοιο ώστε $g(x_2) = 0$ και είναι μοναδικό λόγω της μονοτονίας της g

Λαμβάνοντας υπόψη τη μονοτονία της g το πρόσημο της f΄΄ δίνεται από τον πίνακα

| x | -∞ +∞ | $x_1$ | 1 | $x_2$ |
|---|---|---|---|---|
| g(x) | - | + | + | - |
| f ΄΄(x) | - | + | + | - |

Άρα η f έχει δύο μοναδικά σημεία καμπής

**Γ4:** Θεώρημα Bolzano για την g(x)= ln($e^x$-x)-συνx

g(0)g(π/2)=-f(π/2)<0 (η f παρουσιάζει ελάχιστο το 0 , άρα f(π/2)>0

$g'(x) =$ ημx $\frac{e^x-1}{e^x-x}+$ >0 στο (0,π/2)

# ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Είναι $f(x)=1-e^{2x}\cdot\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$, θέτουμε u = x + t , οπότε du = dt

Για t = 0 είναι u = x και για t = -x είναι u = 0 οπότε

$f(x)=1-e^{2x}\cdot\int_x^0\frac{e^{2u-2x}}{g(u)}du=1-\int_x^0\frac{e^{2u}}{g(u)}du=1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du$, γράφουμε τις

προϋποθέσεις και βρίσκουμε f΄(x) = $\frac{e^{2x}}{g(x)}$ και όμοια g΄(x) = $\frac{e^{2x}}{f(x)}$

Άρα f΄(x)g(x) = f(x)g΄(x) τότε $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{g'(x)}{g(x)}$ τότε $ln\left(f(x)\right)=ln\left(g(x)\right)+c$,

για x = 0 τότε c = 0 και f(x) = g(x)

**Δ2.** Αφού f(x) = g(x) είναι f΄(x)f(x) = $e^{2x}$ ⇔ $f^2(x) = e^{2x} + c$, για x = 0 είναι c = 0

Άρα $f^2(x) = e^{2x}$ με f συνεχή και f(x) > 0 για κάθε x∈R οπότε $f(x) = e^x$

**Δ3.** $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{y\to-\infty}\frac{1}{ye^y}=\lim\limits_{y\to-\infty}\frac{e^{-y}}{y}$ και με De L' Hospital

$\lim\limits_{y\to-\infty}\frac{e^{-y}}{y}=\lim\limits_{y\to-\infty}\frac{-e^{-y}}{1}=-\infty$

**Δ4.** Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο R με $F'(x) = f(x^2) = e^{x^2} > 0$ για κάθε $x \in R$, άρα η F είναι γνησίως αύξουσα στο R , άρα με $x < 1$ είναι $F(x) < 0$

Η $F(x) \leq 0$ στο $[0, 1]$ και

$$E = \int_0^1 [-F(x)dx] = -\int_0^1 x'F(x)dx = [-xF(x)]_0^1 + \int_0^1 xF'(x)dx = \int_0^1 xe^{x^2}dx = \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$$